向量解析的主要知识点罗列如下:

1.向量函数

1) 内积和外积
$\vec{A}=A_x\vec{i}+A_y\vec{j}+A_z\vec{k},\vec{B}=B_x\vec{i}+B_y\vec{j}+B_z\vec{k}$ 内积: $\vec{A}\cdot \vec{B}=|A||B|\cos \theta=A_xB_x+A_yB_y+A_zB_z$ $\vec{A}\perp \vec{B}\Leftrightarrow \vec{A}\cdot \vec{B}=0, |\vec{A}|^2=\vec{A}\cdot \vec{A}$ 外积: $\vec{A}\times\vec{B}=\begin{vmatrix}\vec{i}&\vec{j}&\vec{k}\\A_x&A_y&A_z\\B_x&B_y&B_z\end{vmatrix}$ $=(A_yB_z-A_zB_y)\vec{i}+(A_zB_x-A_xB_z)\vec{j}+(A_xB_y-A_yB_x)\vec{k}$ $|\vec{A}\times \vec{B}|=|\vec{A}||\vec{B}|\sin \theta$ 3) 标量三重积 $[\vec{A}\vec{B}\vec{C}]=\vec{A}\cdot(\vec{B}\times \vec{C}=\vec{B}\cdot(\vec{C}\times \vec{A})=\vec{C}\cdot (\vec{A}\times \vec{B})$ $=\begin{vmatrix}A_x&A_y&A_z\\B_x&B_y&B_z\\C_x&C_y&C_z\end{vmatrix}$ 几何意义是由$\vec{A},\vec{B},\vec{C}$组成的平行六面体的有向体积 4) 向量三重积 $(\vec{A}\times \vec{B})\times \vec{C}=(\vec{A}\cdot \vec{C})\vec{B}-(\vec{B}\cdot \vec{C})\vec{A}$ $(\vec{A}\times \vec{B})\cdot (\vec{C}\times \vec{D})=(\vec{A}\cdot \vec{C})(\vec{B}\cdot \vec{D})-(\vec{A}\cdot \vec{D})(\vec{B}\cdot \vec{C})$ $(\vec{A}\times \vec{B})\times \vec{C}\times \vec{D})=[\vec{A}\vec{C}\vec{D}]\vec{B}-[\vec{B}\vec{C}\vec{D}]\vec{A}$

2.向量的微分与积分

1）
$\dfrac{d\vec{A}}{dt}=\dfrac{dA_x}{dt}\vec{i}+\dfrac{dA_y}{dt}\vec{j}+\dfrac{dA_z}{dt}\vec{k}$ $\dfrac{d}{dt}(\vec{A}+\vec{B})=\dfrac{d\vec{A}}{dt}+\dfrac{d\vec{B}}{dt}$ $\dfrac{d}{dt}(\vec{A}\cdot \vec{B})=\dfrac{d\vec{A}}{dt}\cdot \vec{B}+\vec{A}\cdot \dfrac{d\vec{B}}{dt}$ $\dfrac{d}{dt}(\vec{A}\times \vec{B})=\dfrac{d\vec{A}}{dt}\times \vec{B}+\vec{A}\times \dfrac{d\vec{B}}{dt}$ 2)$\int \vec{A}dt=\int A_xdt\quad \vec{i}+\int A_ydt\quad \vec{j}+\int A_zdt\quad \vec{k}$

3.曲线长度

1）线素 $ds=|d\vec{r}|,在区间$[t0,t]$上的曲线弧长为 $s=\int ds=\int |d\vec{r}|=\int{t0}^t |\dfrac{d\vec{r}}{dt}|dt=\int{t_0}^t \sqrt{(\dfrac{dx}{dt})^2+(\dfrac{dy}{dt})^2+(\dfrac{dz}{dt})^2}dt$ 2) 单位切线向量 $\vec{t}-\dfrac{d\vec{r}}{ds}-\dfrac{d\vec{r}}{dt}\cdot \dfrac{1}{\dfrac{ds}{dt}},\vec{t}\cdot \vec{t}=1$ 3) 弗莱纳公式 用$\vec{t},\vec{n},\vec{b}$分别表示单位切线向量，主法向量和副法向量[1]，用χ表示曲率，用τ表示挠率（日语叫捩率） 则弗莱纳公式可以写为 $\left\{\begin{array}{ll} \dfrac{d\vec{t}}{ds}=&\chi\vec{n}\\ \dfrac{d\vec{n}}{ds}=-\chi \vec{t}& \tau\vec{b}\\\dfrac{d\vec{b}}{ds}=&-\tau\vec{n}\end{array} \right.$

4.向量场的线积分

$\int_C \vec{A}\cdot\vec{t}ds=\int_C \vec{A}\cdot d\vec{r}=\int_a^b \vec{A}\cdot \dfrac{d\vec{r}}{ds}ds$

5.面积分

设曲面$\sum: \vec{r}=\vec{r}(u,v)$ 1)单位法向量 $\vec{n}=\dfrac{\partial \vec{r}}{\partial u}\times \dfrac{\partial \vec{r}}{\partial v}/|\dfrac{\partial \vec{r}}{\partial u}\times \dfrac{\partial \vec{r}}{\partial v}|$ 2) 第1基本量 $E=\dfrac{\partial \vec{r}}{\partial u}\cdot \dfrac{\partial \vec{r}}{\partial u}$ $F=\dfrac{\partial \vec{r}}{\partial u}\cdot \dfrac{\partial \vec{r}}{\partial v}$ $G=\dfrac{\partial \vec{r}}{\partial v}\cdot \dfrac{\partial \vec{r}}{\partial v}$ 3) 面素 $dS=|\dfrac{\partial \vec{r}}{\partial u}\times \dfrac{\partial \vec{r}}{\partial v}|dudv=\sqrt{EG-F^2}$ 4) 曲面面积 $\iint_{\sum} dS=\iint_{\sum'}|\dfrac{\partial \vec{r}}{\partial u}\times \dfrac{\partial \vec{r}}{\partial v}|dudv$ 5) 标量场的面积分 $\iint_{\sum}\varphi dS=\iint_{\sum'}\varphi(u,v)|\dfrac{\partial \vec{r}}{\partial u}\times \dfrac{\partial \vec{r}}{\partial v}|dudv$ 6) 向量场的面积分 $\iint_{\sum}\vec{A}\cdot \vec{n}dS=\iint_{\sum'}(A_xdydz+A_ydzdx+A_zdxdy)$

2.梯度，散度，旋度

1)梯度，对于标量场$\varphi$$grad \varphi=\nabla \varphi $[2] 2)散度 $div \vec{A}=\nabla \cdot \vec{A}=\dfrac{\partial A_x}{\partial x}+\dfrac{\partial A_y}{\partial y}+\dfrac{\partial A_z}{\partial z}$ 3)旋度 $rot \vec{A}=det \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial }{\partial y} & \dfrac{\partial }{\partial z} \\ A_x & A_y & A_z \end{vmatrix}$

格林公式

在xy平面上的闭曲线C的内部为区域D则有 $\int_C \{P(x,y)dx+Q(x,y)dy\}=\iint_D \{\dfrac{\partial Q(x,y)}{\partial x}-\dfrac{\partial P(x,y)}{\partial y}\}dxdy$

高斯发散定理

$\vec{A}$是向量场V是闭合曲面S的内部$\vec{n}$是S的由内指向外的单位法向量，则有 $\iint_S \vec{A}\cdot \vec{n}dS=\iiint_V div \vec{A}dV$

斯托克斯定理

$\vec{A}$是向量场S是闭合曲线C的内部S是左向正向，则有 $\int_C \vec{A}\cdot \vec{t}dS=\iint_S rot\vec{A}\cdot \vec{n}dS $ (\vec{t}是C的单位切线向量)

∇的微分

1 $grad \varphi=\nabla \varphi, div \vec{A}=\nabla \cdot \vec{A}, rot \vec{A}=\nabla \times \vec{A}, \nabla\cdot \nabla=\nabla^2 =\Delta$ 2) $\nabla(\varphi+k\phi)=\nabla \varphi+k\nabla \phi, \nabla(\varphi \phi)=(\nabla \varphi)\phi+\varphi(\nabla \phi)$ $\nabla(\dfrac{\varphi}{\phi})=\dfrac{(\nabla \varphi)\phi-\varphi(\nabla \phi)}{\phi^2}$ 3) $\nabla \cdot (\vec{A}+k\vec{b})=\nabla \cdot \vec{A}+k\nabla \cdot \vec{B}, \nabla\cdot (\varphi \vec{A})=\nabla \varphi \cdot \vec{A}+\varphi (\nabla \cdot \vec{A})$ 4) $\nabla \times (\vec{A}+k\vec{B})=\nabla \times \vec{A}+k\nabla \times \vec{B}$ $\nabla \times (\varphi \vec{A})=\nabla \varphi \times \vec{A}+\varphi(\nabla \times \vec{A})$ $\nabla \times (\nabla \varphi)=0$ 5) $\nabla \cdot (\nabla \times \vec{A})=0, \nabla \cdot (\vec{A}\times \vec{B})=\vec{B}\cdot (\nabla \times \vec{A})-\vec{A}\cdot (\nabla \times \vec{B})$

[1] 副法向量是切线向量和主法向量的外积

[2] $\nabla 是汉密尔顿算子 \nabla=\dfrac{\partial }{\partial x}\vec{i}+\dfrac{\partial}{\partial y}\vec{j}+\dfrac{\partial}{\partial z}\vec{k}$