

向量解析的主要知识点罗列如下:

# 1.向量函数

1) 内积和外积

$\vec{A}=A_x\vec{i}+A_y\vec{j}+A_z\vec{k}, \vec{B}=B_x\vec{i}+B_y\vec{j}+B_z\vec{k}$  内积:

$\vec{A}\cdot\vec{B}=|A||B|\cos\theta=A_xB_x+A_yB_y+A_zB_z$   $\vec{A}\perp\vec{B}\iff\vec{A}\cdot\vec{B}=0, |\vec{A}|^2=\vec{A}\cdot\vec{A}$  外积:

$\vec{A}\times\vec{B}=\begin{vmatrix}\vec{i}&\vec{j}&\vec{k}\\A_x&A_y&A_z\\B_x&B_y&B_z\end{vmatrix}$   
 $= (A_yB_z - A_zB_y)\vec{i} + (A_zB_x - A_xB_z)\vec{j} + (A_xB_y - A_yB_x)\vec{k}$

$|\vec{A}\times\vec{B}|=|\vec{A}||\vec{B}|\sin\theta$  3) 标量三重积

$(\vec{A}\cdot(\vec{B}\times\vec{C}))=(\vec{B}\cdot(\vec{C}\times\vec{A}))=(\vec{C}\cdot(\vec{A}\times\vec{B}))$

$=\begin{vmatrix}A_x&A_y&A_z\\B_x&B_y&B_z\\C_x&C_y&C_z\end{vmatrix}$  几何意义是

由 $\vec{A}, \vec{B}, \vec{C}$ 组成的平行六面体的有向体积 4) 向量三重积

$(\vec{A}\times\vec{B})\times\vec{C}=(\vec{A}\cdot\vec{C})\vec{B}-(\vec{B}\cdot\vec{C})\vec{A}$

$(\vec{A}\times\vec{B})\cdot(\vec{C}\times\vec{D})=(\vec{A}\cdot\vec{C})(\vec{B}\cdot\vec{D})-(\vec{A}\cdot\vec{D})(\vec{B}\cdot\vec{C})$

$(\vec{A}\times\vec{B})\times(\vec{C}\times\vec{D})=[(\vec{A}\cdot\vec{C})\vec{D}-(\vec{B}\cdot\vec{C})\vec{A}]\times\vec{D}-[\vec{B}\cdot\vec{D}]\vec{C}+(\vec{A}\cdot\vec{D})\vec{C}$

# 2.向量的微分与积分

1)

$\frac{d\vec{A}}{dt}=\frac{dA_x}{dt}\vec{i}+\frac{dA_y}{dt}\vec{j}+\frac{dA_z}{dt}\vec{k}$   
 $\frac{d}{dt}(\vec{A}+\vec{B})=\frac{d\vec{A}}{dt}+\frac{d\vec{B}}{dt}$

$\frac{d}{dt}(\vec{A}\cdot\vec{B})=\frac{d\vec{A}}{dt}\cdot\vec{B}+\vec{A}\cdot\frac{d\vec{B}}{dt}$

$\frac{d}{dt}(\vec{A}\times\vec{B})=\frac{d\vec{A}}{dt}\times\vec{B}+\vec{A}\times\frac{d\vec{B}}{dt}$

2)  $\int \vec{A} dt = \int A_x dt \vec{i} + \int A_y dt \vec{j} + \int A_z dt \vec{k}$

# 3.曲线长度

1) 线素  $ds=|d\vec{r}|$ , 在区间  $[t_0, t]$  上的曲线弧长为  $s=\int ds=\int |d\vec{r}|=\int_{t_0}^t \sqrt{(\frac{dx}{dt})^2+(\frac{dy}{dt})^2+(\frac{dz}{dt})^2} dt$

2) 单位切线向量  $\vec{t}=\frac{d\vec{r}}{ds}=\frac{d\vec{r}}{dt}\cdot\frac{dt}{ds}$

3) 弗莱纳公式 用  $\vec{t}, \vec{n}, \vec{b}$  分别表示单位切线向量, 主法向量和副法向量<sup>1)</sup>, 用  $\chi$  表示曲率, 用  $\tau$  表示挠率 (日语叫捩率) 则弗莱纳公式可以写为  $\left\{ \begin{array}{l} \frac{d\vec{t}}{ds}=\chi\vec{n} \\ \frac{d\vec{n}}{ds}=-\chi\vec{t}+\tau\vec{b} \\ \frac{d\vec{b}}{ds}=-\tau\vec{n} \end{array} \right.$

## 4. 向量场的线积分

$$\int_C \vec{A} \cdot d\vec{r} = \int_a^b \vec{A} \cdot \frac{d\vec{r}}{ds} ds$$

## 5. 面积分

设曲面  $\sum: \vec{r} = \vec{r}(u, v)$  1) 单位法向量  $\vec{n} = \frac{\partial \vec{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \vec{r}}{\partial v} / |\frac{\partial \vec{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \vec{r}}{\partial v}|$  2) 第1基本量  $E = \frac{\partial \vec{r}}{\partial u} \cdot \frac{\partial \vec{r}}{\partial u}$   $F = \frac{\partial \vec{r}}{\partial u} \cdot \frac{\partial \vec{r}}{\partial v}$   $G = \frac{\partial \vec{r}}{\partial v} \cdot \frac{\partial \vec{r}}{\partial v}$  3) 面素  $dS = \frac{\partial \vec{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \vec{r}}{\partial v} |dudv| = \sqrt{EG - F^2} dudv$  4) 曲面面积  $\iint_{\sum} dS = \iint_{\sum'} |\frac{\partial \vec{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \vec{r}}{\partial v}| dudv$  5) 标量场的面积分  $\iint_{\sum} \varphi dS = \iint_{\sum'} \varphi(u, v) |\frac{\partial \vec{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \vec{r}}{\partial v}| dudv$  6) 向量场的面积分  $\iint_{\sum} \vec{A} \cdot \vec{n} dS = \iint_{\sum'} (A_x dydz + A_y dzdx + A_z dxdy)$

## 2. 梯度，散度，旋度

1) 梯度, 对于标量场  $\varphi$   $\text{grad } \varphi = \nabla \varphi$  2) 散度  $\text{div } \vec{A} = \nabla \cdot \vec{A} = \frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z}$  3) 旋度  $\text{rot } \vec{A} = \det \begin{pmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ A_x & A_y & A_z \end{pmatrix}$

## 格林公式

在xy平面上的闭曲线C的内部为区域D则有  $\int_C \{P(x,y)dx + Q(x,y)dy\} = \iint_D \{\frac{\partial Q(x,y)}{\partial x} - \frac{\partial P(x,y)}{\partial y}\} dxdy$

## 高斯发散定理

$\vec{A}$  是向量场  $V$  是闭合曲面  $S$  的内部  $\vec{n}$  是  $S$  的由内指向外的单位法向量, 则有  $\iint_S \vec{A} \cdot \vec{n} dS = \iiint_V \text{div } \vec{A} dV$

# 斯托克斯定理

$\vec{A}$ 是向量场  $\Sigma$ 是闭合曲线C的内部  $\Sigma$ 是左向正向，则有  $\int_C \vec{A} \cdot d\vec{t} = \iint_S \text{rot} \vec{A} \cdot \vec{n} dS$  ( $\vec{t}$ 是C的单位切线向量)

## $\nabla$ 的微分

1)  $\text{grad } \varphi = \nabla \varphi, \text{div } \vec{A} = \nabla \cdot \vec{A}, \text{rot } \vec{A} = \nabla \times \vec{A}, \nabla \cdot \nabla = \Delta$  2)  $\nabla(\varphi + k\psi) = \nabla \varphi + k\nabla \psi, \nabla(\varphi \psi) = (\nabla \varphi)\psi + \varphi(\nabla \psi)$   
 $\nabla(\frac{\varphi}{\psi}) = \frac{(\nabla \varphi)\psi - \varphi(\nabla \psi)}{\psi^2}$  3)  $\nabla(\vec{A} + k\vec{B}) = \nabla \vec{A} + k\nabla \vec{B}, \nabla(\varphi \vec{A}) = \nabla \varphi \cdot \vec{A} + \varphi(\nabla \cdot \vec{A})$  4)  $\nabla(\vec{A} + k\vec{B}) = \nabla \vec{A} + k\nabla \vec{B}$   
 $\nabla(\varphi \vec{A}) = \nabla \varphi \times \vec{A} + \varphi(\nabla \times \vec{A})$  5)  $\nabla \cdot (\nabla \times \vec{A}) = 0, \nabla \cdot (\vec{A} \times \vec{B}) = \vec{B} \cdot (\nabla \times \vec{A}) - \vec{A} \cdot (\nabla \times \vec{B})$

- 1)
- 副法向量是切线向量和主法向量的外积
- 2)

$\nabla$  是汉密尔顿算子  $\nabla = \frac{\partial}{\partial x} \vec{i} + \frac{\partial}{\partial y} \vec{j} + \frac{\partial}{\partial z} \vec{k}$

From: <https://trident365.com/> - 三叉戟

Permanent link: <https://trident365.com/doku.php?id=areas:%E5%A4%A7%E5%AD%A6%E9%99%A2:%E5%90%91%E9%87%8F%E8%A7%A3%E6%9E%90>

Last update: 2025/01/18 19:43

