

微积分主要知识点整理如下:

1.函数的极限

1) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$, $\lim_{x \rightarrow \pm \infty} (1 + \frac{1}{x})^x = e$ 2) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^n}{e^x} = 0$, $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\log x}{x^{n+1}} = 0$ (quad $(n=0,1,2,\dots)$)

2.中值定理

如果函数 $f(x)$ 在区间 $[a,b]$ 是连续的, 且 $f(a) \neq f(b)$ 则有 $f(x)$ 在区间 (a,b) 上可以取遍 $f(a)$ 与 $f(b)$ 间的所有值。

3.有界性

在闭区间连续的函数, 在区间上是有界的。

4.最大值, 最小值定理

在闭区间连续的函数, 在区间上一定有最大值和最小值。

5.微分

1) 合成函数的微分 $y=f(t), t=g(x)$ 则有 $\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dt} \cdot \frac{dt}{dx}$ 2) 含参函数的微分 $x=\varphi(t), y=\psi(t)$ 则有 $\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dt} / \frac{dx}{dt}$ 3) 反函数的微分 $\frac{dx}{dy} = 1 / \frac{dy}{dx}$ 4) 对数微分法 对函数取对数后再微分 例 $y=x^x$ 求它的微分 $\log y = x \log x \implies \frac{y'}{y} = \log x + 1 \implies y' = y(\log x + 1) = x^x(\log x + 1)$

6.莱布尼茨定理 (用于求高阶导数)

$$\frac{d^n}{dx^n} (f(x)g(x)) = \sum_{k=0}^n C_n^k f^{(n-k)}(x)g^{(k)}(x)$$

7.均值定理

如果 $f(x)$ 在区间 $[a,b]$ 上连续, 在 (a,b) 上可导, 则有 $\frac{f(b)-f(a)}{b-a} = f'(c)$, 满足 $a < c < b$ 的 c 一定存在

8.柯西均值定理

有 $f(x),g(x)$,在区间 $[a,b]$ 上连续,在开区间 (a,b) 上可导,且在 (a,b) 区间上有 $g'(x)\neq 0$ 则有 $\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}=\frac{f'(c)}{g'(c)}$,满足 $a<c<b$ 的 c 一定存在

9.不定极限

不定极限有 $\frac{0}{0},\frac{\infty}{\infty},0^{\infty},1^{\infty},\infty^0$ 等形式,其中以 $\frac{0}{0}$ 型的极限,可以使用洛必达法则,上下求导计算 $\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to x_0}\frac{f'(x)}{g'(x)}$

10.高阶无穷小

如果 $\frac{f(x)}{g(x)}\to 0(x\to x_0)$,则有 $f(x)=o(g(x))$

11.泰勒级数展开

$f(x)=f(a)+\frac{f'(a)}{1!}(x-a)+\frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2+\dots+\frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n+\dots$ 特别地,当 $a=0$ 时,称为麦克劳林级数展开。

常用的泰勒级数展开有 $e^x=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!}$
 $\frac{1}{1-x}=\sum_{n=0}^{\infty}x^n$
 $\cos x=1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}-\dots$
 $\sin x=x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}-\dots$
 $\log(x+1)=x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\dots$
 $e^{-x}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n x^n}{n!}$
 $\frac{1}{1+x}=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n x^n$

12.积分法

1) $\int \frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}}=\arcsin \frac{x}{a}$
 $\int \frac{dx}{x^2+a^2}=\frac{1}{a}\arctan \frac{x}{a}$
 $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+a^2}}=\log(x+\sqrt{x^2+a^2})$ 2) 如果在 $[a,b]$ 上可积的函数 $f(x)$ 的原函数为 $F(x)$,则有 $\int_a^b f(x)dx=[F(x)]_a^b=F(b)-F(a)$ 3) 部分积分法 $\int_a^b f'(x)g(x)dx=[f(x)g(x)]_a^b-\int_a^b f(x)g'(x)dx$ 4) 换元积分法 令 $x=\varphi(t)$,则 $\int_a^b f(x)dx=\int_{\alpha}^{\beta} f(\varphi(t))\varphi'(t)dt$ ($a=\varphi(\alpha),b=\varphi(\beta)$)

13.积分不等式

1) $\int_a^b f(x)dx \leq \int_a^b |f(x)|dx \quad (a < b)$ 2) 柯西-施瓦茨不等式,这个基本考不到
 $(\int_a^b f(x)g(x)dx)^2 \leq (\int_a^b (f(x))^2 dx) \cdot (\int_a^b (g(x))^2 dx)$

14.曲线长度 1) 曲线为含参形式 $x=\varphi(t), y=\psi(t) (\alpha \leq t \leq \beta)$ 对应的曲线长度为
 $\int_a^{\beta} \sqrt{\varphi'(t)^2 + \psi'(t)^2} dt$ 2) 曲线为一般形式 $y=f(x) (a \leq x \leq b)$ 对应的
曲线长度为 $\int_a^b \sqrt{1+f'(x)^2} dx$ 3) 曲线为极坐标形式时 $r=f(\theta) (\alpha \leq \theta \leq \beta)$ 时, 对应的曲线长度为
 $\int_{\alpha}^{\beta} \sqrt{r^2 + (\frac{dr}{d\theta})^2} d\theta$

15.三角函数相关的有理式积分

1) 万能公式 $\tan \frac{x}{2} = t, dx = \frac{2dt}{t^2+1}, \sin x = \frac{2t}{t^2+1}, \cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2}$ 2) 欧拉公式 由 $\sin x$ 和 $\cos x$ 组成的积分,使用欧拉公式统一为 e^{ix} 的形式
 $e^{ix} = \cos x + i\sin x, \cos x = \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2}, \sin x = \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i}$ 特别地,双曲函数 $\cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}, \sinh x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$

16.广义积分和特殊积分

1) 在闭区间 $[a, b]$ 内点 c 附近,函数 $f(x)$ 不是有界函数,若 $\lim_{\delta_1 \rightarrow 0} \int_{c-\delta_1}^c f(x)dx + \lim_{\delta_2 \rightarrow 0} \int_{c+\delta_2}^b f(x)dx$ 存在的话,则称 $f(x)$ 是可积的,上式的极限值称为广义积分.
2) $\int_{-\infty}^b f(x)dx = \lim_{x \rightarrow -\infty} \int_x^b f(x)dx, \int_a^{+\infty} f(x)dx = \lim_{x \rightarrow +\infty} \int_a^x f(x)dx$ 当积分的上限或下限为无穷大时,可以利用极限来求积分的值.

From: <https://trident365.com/> - 三叉戟

Permanent link: <https://trident365.com/doku.php?id=areas:%E5%A4%A7%E5%AD%A6%E9%99%A2:%E5%BE%AE%E7%A7%AF%E5%88%86>

Last update: 2025/01/18 19:46

